

Differenciálegyenetek alapfogalmai

Ayadi Viktor

Násztor Zoltán

SZTE TTIK Elméleti Fizika Tanszék

2008.

Tartalomjegyzék

1. Alapfogalmak	3
1.1. Szétválasztható differenciálegyenletek	4
2. Kezdetiérték-probléma megoldásának létezése és egyértelműsége	5
2.1. Egy dimenziós eset	5
2.2. Több dimenzióban	7
3. Konstans együthatós magasabbrendű homogén közönséges differenciálegyenletek	9
4. Példák	10
4.1. Szétválasztható differenciálegyenletek	10
4.2. Elsőrendű lineáris differenciálegyenletek megoldása	11

1. Alapfogalmak

Differenciálegyenleteknek nevezzük az olyan egyenletet, amelyben egy vagy több független változó, ennek vagy ezeknek valamilyen ismeretlen függvénye vagy függvényei és ennek a függvénynek vagy függvényeknek a független változó vagy változók szerinti közönséges vagy parciális deriváltja vagy deriváltjai szerepelnek. A differenciálegyenlet rendje a benne szereplő legmagasabb rendű derivált rendje.

A továbbiakban a közönséges differenciálegyenletek tárgyalásával fogunk foglalkozni. Közönséges differenciál egyenletnek nevezzük az olyan függvény egyenletet, amelyben az ismeretlen függvény $(x(t))$ egyváltozós és deriváltjai is előfordulnak az egyenletben a változó ugyanazon t értékénél.

Minden n -ed rendű közönséges differenciálegyenlet visszaírható n darab lineáris közönséges differenciálegyenletre.

Az

$$x'(t) = f(t, x(t)) \quad (1.1)$$

elsőrendű differenciálegyenletnek szemléletes geometriai jelentése van. Ha $x(t) = \varphi(t)$ az egyenlet megoldása valamely I intervallumon, akkor $\varphi'(t) = f(t, \varphi(t))$ teljesül $\forall t \in I$ esetén. Innen az adódik, hogy az $x(t) = \varphi(t)$ függvény grafikonja a $(t_0, \varphi(t_0))$ pontjához húzott érintőjének iránytangense $f(t_0, \varphi(t_0))$.

Ez azt jelenti, hogy az $x(t) = \varphi(t)$ megoldásról csak annyit tudunk, hogy a $t_0 \in I$ pontban a $\varphi(t_0)$ értéket veszi fel, akkor grafikonjának a $(t_0, \varphi(t_0))$ pontbeli érintőjét meg tudjuk adni. Másként fogalmazva, az

$$t \mapsto (t, \varphi(t)) \in \mathbb{R}^2, \quad t \in I \quad (1.2)$$

görbe $t_0 \in I$ pontbeli érintővektora

$$(1, \varphi'(t_0)) = (1, f(t_0, \varphi(t_0))). \quad (1.3)$$

Megjegyzés. A továbbiakban az $x(t_0)$ -ra az x_0 jelölést fogjuk használni egyváltozós esetben.

Így, ha $U \subset \mathbb{R}^2$ az f értelmezési tartománya, $(t_0, x_0) \in U$, és a (t_0, x_0) ponton áthalad az egyenlet valamely $x(t) = \varphi(t)$ megoldása, azaz $\varphi(t_0) = x_0$, azaz akkor a $t \mapsto (t, \varphi(t))$ görbe érintővektora a (t_0, x_0) pontban az $(1, f(t_0, x_0))$ vektor.

Az $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ függvény ismeretében minden $(t_0, x_0) \in U$ ponthoz hozzárendeljük az $(1, f(t_0, x_0))$ vektort. Ezen vektorok összességét iránymezőnek nevezzük. Az (1.1) egyenlet megoldása ekvivalens a fenti iránymező megadásával. Mi az egyenlet megoldásait keressük. A megoldások olyan függvények, amelyek simulnak az iránymezőhöz, azaz ha $x(t) = \varphi(t)$ megoldás I -n, és $\varphi(t_0) = x_0$ valamely $(t_0, x_0) \in U$ pontra, akkor (1.2) görbe érintője t_0 -ban éppen a vektormező (t_0, x_0) pontjához hozzárendelt $(1, f(t_0, x_0))$ vektora.

Olyan differenciálegyenleteket is vizsgálunk, amelyekben több ismeretlen függvény szerepel.

Egy ilyen az

$$\begin{aligned} x_1'(t) &= f_1(t, x_1(t), \dots, x_n(t)) \\ x_2'(t) &= f_2(t, x_1(t), \dots, x_n(t)) \\ &\vdots \\ x_n'(t) &= f_n(t, x_1(t), \dots, x_n(t)), \end{aligned} \quad (1.4)$$

azaz tömörebben

$$\mathbf{X}'(t) = \mathbf{F}(t, \mathbf{X}(t)) \quad (1.5)$$

elsőrendű differenciálegyenlet-rendszer, ahol $U \subset \mathbb{R}^{n+1}$ és $f_i : U \rightarrow \mathbb{R}$, $i \in (1, \dots, n)$ adottak. Az $x_1(t) = \varphi_1(t), \dots, x_n(t) = \varphi_n(t)$ függvényeket az (1.4) rendszer egy megoldásának nevezzük valamely I intervallumon, ha

1. $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ differenciálhatók I -n
2. $(t, \varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)) \in U \forall t \in I$
3. $\varphi_i'(t) = f_i(t, \varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t))$, $\forall t \in I$ esetén.

Az (1.1) egyenlethez tartozó *kezdetiérték-problémának* (KÉP) nevezzük azt a feladatot, amikor adott az f értelmezési tartományának egy (t_0, x_0) pontja, és az (1.1) egyenletnek egy olyan $x(t) = \varphi(t)$ megoldását keressük valamely I intervallumon, amelyre $t_0 \in I$ és $\varphi(t_0) = x_0$ teljesül. Hasonlóan értelmezzük a kezdetiérték-problémát közönséges differenciálegyenlet-rendszer esetén.

1.1. Szétválasztható differenciálegyenletek

Legyen $x(t)$ egy folytonos függvény valamely I_1 és $g(x)$ egy folytonos függvény valamely I_2 intervallumon, továbbá $g(x) \neq 0$ ha $x \in I_2$. Ekkor az

$$x'(t) = f(t)g(x(t)) \quad (1.6)$$

alakú elsőrendű közönséges differenciálegyenleteket szétválasztható változójú differenciálegyenleteknek nevezzük. Legyen $h(x) := \frac{1}{g(x)}$. Tehát $h(x(t))x'(t) = f(t)$. Ekkor a helyettesítéses integrálás szabálya szerint a következőképpen járhatunk el:

$$\int h(x(t))x'(t) dt = \int h(x) dx = \int f(t)dt + C. \quad (1.7)$$

Vegyük észre, hogy a baloldal csak x , míg a jobboldal csak t függvénye. Láthatunk néhány egyszerű példát a 4. fejezetben.

Homogénnek nevezzük egy elsőrendű lineári differenciálegyenletet, amennyiben

$$x'(t) + p(t)x(t) = 0 \quad (1.8)$$

alakú.

2. Kezdetiérték-probléma megoldásának létezése és egyértelműsége

2.1. Egy dimenziós eset

1. Tétel. (Picard-Lindelöf) Tekintsük a 1.5 alakú differenciálegyenlet-rendszert, ahol $F : U \rightarrow \mathbb{R}$, $U = [t_0 - a, t_0 + a] \times \{X \in \mathbb{R} \mid \|x - x_0\| \leq b\}$, a kezdeti érték pedig legyen $X(t_0) = X_0$. Tegyük fel, hogy F folytonos U -n. Továbbá legyen F lokálisan Lipschitz tulajdonságú, ami alatt azt értjük, hogy $\exists c, \forall (t, X_1), (t, X_2) \in U$ esetén igaz, hogy $\|F(t, X_1) - F(t, X_2)\| \leq c\|X_1 - X_2\|$. Ekkor egyértelműen létezik $X(t) = X(t, t_0, X_0)$ megoldása a KÉP-nak, és ez a megoldás folytonosan függ t_0, X_0 -tól.

Bizonyítás. A bizonyítást két részre bontjuk. Kezdjük a bizonyítást az egzisztencia vizsgálatával

Írjuk át a KÉP-et integrálegyenletté:

$$X'(t) = F(t, X(t)) \Rightarrow \int X'(t)dt = \int F(t, X(t))dt, \quad (2.1)$$

megjegyezzük, hogy az integrálások t_0 és t között értendők a továbbiakban.

$$X(t) - X(t_0) = \int F(t, X(t))dt \Rightarrow X(t) = X_0 + \int F(t, X(t))dt \quad (2.2)$$

Hajtsunk végre egy szukcesszív approximációt, $\varphi_0(t) := X_0$, vezessük be az $\mathcal{A}$ operátort a következőképpen

$$\mathcal{A}\varphi(t) = \varphi(t) + \int F(t, \varphi(t))dt \quad (2.3)$$

$$\varphi_i(t) = \mathcal{A}\varphi_{i-1}(t) \Rightarrow \varphi_i(t) = \mathcal{A}^i\varphi_0(t). \quad (2.4)$$

Teljes indukcióval belátható, hogy ha $\varphi_n(t)$ megoldás $[t_0 - h, t_0 + h]$ intervallumon, akkor φ_{n+1} is megoldás. Ahol $h := \min(a, b/M)$ és $M := \max_{(t,X) \in U} \|F(t, X)\|$. Látható, hogy φ_0 ilyen tulajdonságú. A következő lépésként belátjuk, hogy $(t, \varphi_n(t)) \in U$, tegyük fel, hogy ez igaz n -ig. Most tekintsük $n + 1$ -re

$$\varphi_{n+1}(t) = X_0 + \int F(t, \varphi_n(t))dt \quad (2.5)$$

$$\|\varphi_n(t) - X_0\| = \left\| \int F(t, \varphi_n(t))dt \right\| \leq \left| \int \|F(t, \varphi_n(t))\| dt \right| = M|t - t_0| \leq b. \quad (2.6)$$

A bizonyítást a φ_n függvény sorozat, Cauchy konvergenciájának igazolásával folytatjuk. Azaz belátjuk, hogy $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\varphi_n(t) - \varphi(t)\| = 0$, ahol $t \in [t_0 - h, t_0 + h]$. Használjunk teljes indukcióval, tegyük fel, hogy igaz az alábbi összefüggés n -re:

$$\|\varphi_{n+1}(t) - \varphi_n(t)\| \leq \frac{c^n M (t - t_0)^{n+1}}{(n+1)!}. \quad (2.7)$$

Látható, hogy teljesül $n = 1$ esetén. Most belátjuk, hogy $n + 1$ esetén is fennáll az összefüggés:

$$\begin{aligned} \|\varphi_{n+2}(t) - \varphi_{n+1}(t)\| &= \left\| X_0 + \int F(s, \varphi_{n+1}(s)) ds - X_0 - \int F(s, \varphi_n(s)) ds \right\| \\ &\quad \text{kihasználhatjuk, hogy } F \text{ Lipschitz tulajdonságú} \\ &\quad \text{figyelembe vesszük az indukciós feltevést is} \\ &\leq \left| \int c \frac{c^n M(s - t_0)^{n+1}}{(n+1)!} ds \right| = \frac{c^{n+1} M(t - t_0)^{n+2}}{(n+2)!}. \end{aligned} \quad (2.8)$$

A végeredményt önmagában is érthető módon összefoglaljuk a

$$\varphi_{n+1} = X_0 + \int F(s, \varphi_n(s)) ds \rightarrow X_0 + \int F(s, \varphi(s)) ds = \varphi(t) \quad (2.9)$$

összefüggésben, mely egy iterációs eljárást ad a közöséges differenciálegyenletek megoldására. Ezzel az egzisztenciát igazoltuk, áttérünk az unicitás bizonyítására. A bizonyítás lényegesen leegyszerűsödik, ha kimondjuk az úgynevezett Gronwald-Bellmann Lemmát.

Lemma. Tegyük fel, hogy $u, v : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^+$, valamint $0 \leq k$, és $u(t) \leq k + \int_a^t u(s)v(s) ds$ teljesülnek. Ekkor

$$u(t) \leq k e^{\int_a^t v(s) ds}, \quad (2.10)$$

összefüggés teljesül, ami egy u -tól független felsőbecslés.

A bizonyítás az állítás átrendezésével és egy integrál elvégzésével történik.

Térjünk vissza az unicitás bizonyításához, tegyük fel, hogy φ és ψ megoldások a $X(t_0) = X_0$ és $X(t_0) = \tilde{X}_0$ kezdeti feltételekhez.

$$\begin{aligned} \|\varphi(t) - \psi(t)\| &\leq \|X_0 - \tilde{X}_0\| + \int \|F(s, \varphi(s)) - F(s, \psi(s))\| ds \\ &\quad \text{felhasználtuk az integrálegyenletes alakot és a háromszögazonosságot} \\ &\quad \text{Alkalmazzuk a lemmát úgy, hogy a } u \text{ szerepét a két megoldás különbsége} \\ &\quad \text{tölti be, valamint } v \text{ a Lipschitz konstans} \\ &\quad k := \|X_0 - \tilde{X}_0\| + \epsilon, \quad \epsilon > 0 \\ &\leq (\|X_0 - \tilde{X}_0\| + \epsilon) e^{\int c ds} = (\|X_0 - \tilde{X}_0\| + \epsilon) e^{c(t-t_0)}. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Azaz, ha $X_0 = \tilde{X}_0$ akkor a megoldás egyértelmű $\varphi(t) = \psi(t)$.

2.2. Több dimenzióban

1. Tétel. (Picard-Lindelöf) Tekintsük a 1.5 alakú differenciálegyenlet-rendszert, ahol $\mathbf{F} : U \rightarrow \mathbb{R}^n$, $U = [t_0 - a, t_0 + a] \times \{\mathbf{X} \in \mathbb{R}^n \mid \|x - x_0\| \leq b\}$, a kezdeti érték pedig legyen $\mathbf{X}(t_0) = \mathbf{X}_0$. Tegyük fel, hogy $\mathbf{F}$ folytonos U -n. Továbbá legyen $\mathbf{F}$ lokálisan Lipschitz tulajdonságú, ami alatt azt értjük, hogy $\exists c, \forall (t, \mathbf{X}_1), (t, \mathbf{X}_2) \in U$ esetén igaz, hogy $\|\mathbf{F}(t, \mathbf{X}_1) - \mathbf{F}(t, \mathbf{X}_2)\| \leq c\|\mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_2\|$. Ekkor egyértelműen létezik $\mathbf{X}(t) = \mathbf{X}(t, t_0, \mathbf{X}_0)$ megoldása a KÉP-nak, és ez a megoldás folytonosan függ $t_0, \mathbf{X}_0$ -tól.

Bizonyítás. A bizonyítást két részre bontjuk. Kezdjük a bizonyítást az egzisztencia vizsgálatával

Írjuk át a KÉP-et integrálegyenletté:

$$\mathbf{X}'(t) = \mathbf{F}(t, \mathbf{X}(t)) \Rightarrow \int \mathbf{X}'(t)dt = \int \mathbf{F}(t, \mathbf{X}(t))dt, \quad (2.12)$$

megjegyezzük, hogy az integrálások t_0 és t között értendők a továbbiakban.

$$\mathbf{X}(t) - \mathbf{X}(t_0) = \int \mathbf{F}(t, \mathbf{X}(t))dt \Rightarrow \mathbf{X}(t) = \mathbf{X}_0 + \int \mathbf{F}(t, \mathbf{X}(t))dt \quad (2.13)$$

Hajtsunk végre egy sukcesszív approximációt, $\varphi_0(t) := \mathbf{X}_0$, vezessük be az $\mathcal{A}$ operátort a következőképpen

$$\mathcal{A}\varphi(t) = \varphi(t) + \int \mathbf{F}(t, \varphi(t))dt \quad (2.14)$$

$$\varphi_i(t) = \mathcal{A}\varphi_{i-1}(t) \Rightarrow \varphi_i(t) = \mathcal{A}^i\varphi_0(t). \quad (2.15)$$

Teljes indukcióval belátható, hogy ha $\varphi_n(t)$ megoldás $[t_0 - h, t_0 + h]$ intervallumon, akkor φ_{n+1} is megoldás. Ahol $h := \min(a, b/M)$ és $M := \max_{(t, \mathbf{X}) \in U} \|\mathbf{F}(t, \mathbf{X})\|$. Látható, hogy φ_0 ilyen tulajdonságú. A következő lépésként belátjuk, hogy $(t, \varphi_n(t)) \in U$, tegyük fel, hogy ez igaz n -ig. Most tekintsük $n + 1$ -re

$$\varphi_{n+1}(t) = \mathbf{X}_0 + \int \mathbf{F}(t, \varphi_n(t))dt \quad (2.16)$$

$$\|\varphi_n(t) - \mathbf{X}_0\| = \left\| \int \mathbf{F}(t, \varphi_n(t))dt \right\| \leq \left| \int \|\mathbf{F}(t, \varphi_n(t))\|dt \right| = M|t - t_0| \leq b. \quad (2.17)$$

A bizonyítást a φ_n függvény sorozat, Cauchy konvergenciájának igazolásával folytatjuk. Azaz belátjuk, hogy $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\varphi_n(t) - \varphi(t)\| = 0$, ahol $t \in [t_0 - h, t_0 + h]$. Használjunk teljes indukcióval, tegyük fel, hogy igaz az alábbi összefüggés n -re:

$$\|\varphi_{n+1}(t) - \varphi_n(t)\| \leq \frac{c^n M(t - t_0)^{n+1}}{(n + 1)!}. \quad (2.18)$$

Látható, hogy teljesül $n = 1$ esetén. Most belátjuk, hogy $n + 1$ esetén is fennáll az összefüggés:

$$\begin{aligned} \|\varphi_{n+2}(t) - \varphi_{n+1}(t)\| &= \left\| \mathbf{X}_0 + \int \mathbf{F}(s, \varphi_{n+1}(s))ds - \mathbf{X}_0 - \int \mathbf{F}(s, \varphi_n(s))ds \right\| \\ &\quad \text{kihasználhatjuk, hogy } \mathbf{F} \text{ Lipschitz tulajdonságú} \\ &\quad \text{figyelembe vesszük az indukciós feltevést is} \\ &\leq \left| \int c \frac{c^n M(s - t_0)^{n+1}}{(n + 1)!} ds \right| = \frac{c^{n+1} M(t - t_0)^{n+2}}{(n + 2)!}. \end{aligned} \quad (2.19)$$

A végeredményt önmagában is érthető módon összefoglaljuk a

$$\varphi_{n+1} = \mathbf{X}_0 + \int \mathbf{F}(s, \varphi_n(s)) ds \rightarrow \mathbf{X}_0 + \int \mathbf{F}(s, \varphi(s)) ds = \varphi(t) \quad (2.20)$$

összefüggésben, mely egy iterációs eljárást ad a közönséges differenciálegyenletek megoldására. Ezzel az egzisztenciát igazoltuk, áttérünk az unicitás bizonyítására. A bizonyítás lényegesen leegyszerűsödik, ha kimondjuk az úgynevezett Gronwald-Bellmann Lemmát.

Lemma. Tegyük fel, hogy $u, v : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^+$, valamint $0 \leq k$, és $u(t) \leq k + \int_a^t u(s)v(s) ds$ teljesülnek. Ekkor

$$u(t) \leq ke^{\int_a^t v(s) ds}, \quad (2.21)$$

összefüggés teljesül, ami egy u -tól független felsőbecslés.

A bizonyítás az állítás átrendezésével és egy integrál elvégzésvel történik.

Térjünk vissza az unicitás bizonyításához, tegyük fel, hogy φ és ψ megoldások a $\mathbf{X}(t_0) = \mathbf{X}_0$ és $\mathbf{X}(t_0) = \tilde{\mathbf{X}}_0$ kezdeti feltételekhez.

$$\begin{aligned} \|\varphi(t) - \psi(t)\| &\leq \|\mathbf{X}_0 - \tilde{\mathbf{X}}_0\| + \int \|\mathbf{F}(s, \varphi(s)) - \mathbf{F}(s, \psi(s))\| ds \\ &\quad \text{felhasználtuk az integrálegyenletes alakot és a háromszögonosságot} \\ &\quad \text{Alkalmazzuk a lemmát úgy, hogy a } u \text{ szerepét a két megoldás különbsége} \\ &\quad \text{tölti be, valamint } v \text{ a Lipschitz konstans} \\ k &:= \|\mathbf{X}_0 - \tilde{\mathbf{X}}_0\| + \epsilon, \quad \epsilon > 0 \\ &\leq \left(\|\mathbf{X}_0 - \tilde{\mathbf{X}}_0\| + \epsilon \right) e^{\int c ds} = \left(\|\mathbf{X}_0 - \tilde{\mathbf{X}}_0\| + \epsilon \right) e^{c(t-t_0)}. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Azaz, ha $\mathbf{X}_0 = \tilde{\mathbf{X}}_0$ akkor a megoldás egyértelmű $\varphi(t) = \psi(t)$.

3. Konstans együthatós magasabbrendű homogén közönséges differenciálegyenletek

Tekintsük a következő alakú közönséges differenciálegyenletet:

$$a_n x^{(n)}(t) + \dots + a_1 x'(t) + a_0 x(t) = 0. \quad (3.1)$$

Keressük a megoldást $e^{\lambda t}$ alakban, ekkor

$$\begin{aligned} a_n \lambda^n e^{\lambda t} + \dots + a_1 \lambda e^{\lambda t} + a_0 e^{\lambda t} &= 0 \\ a_n \lambda^n + \dots + a_1 \lambda + a_0 &= 0, \end{aligned} \quad (3.2)$$

adódik, az $e^{\lambda t}$ -vel való osztásnál nem követtünk el hibát, mivel ez a kifejezés soha nem 0. A (3.2) kifejezést karakterisztikus polinomnak nevezzük. Ha $e^{\lambda_i t}$ és $e^{\lambda_j t}$ megoldás, akkor ezek lineáris kombinációja is megoldás. Ha $\lambda_i = \lambda_j$ kétszeres karakterisztikus gyök, akkor a $te^{\lambda_i t}$ megoldás, hasonló igaz magasabb multiplicitású karakterisztikus gyök esetén is.

Néhány állítást bizonyítás nélkül megfogalmazunk, az alábbi operátorok segítségével. Jelentse p az idő szerinti egyszeres deriválás műveletét! Legyen

$$L(p) = a_n p^n + \dots + a_1 p + a_0 \Rightarrow L(p)(\mathbf{X}(t)) = 0. \quad (3.3)$$

Állítás.

$$\begin{aligned} (L(p) + M(p)) \varphi(t) &= L(p)(\varphi(t)) + M(p)(\varphi(t)) \\ (L(p)M(p)) \varphi(t) &= (L(p)(M(p)(\varphi(t)))) \end{aligned} \quad (3.4)$$

Állítás.

$$\begin{aligned} L(p)e^{\lambda t} &= L(\lambda)e^{\lambda t} \\ L(p)(f(t)e^{\lambda t}) &= e^{\lambda t}L(p + \lambda)(f(t)) \end{aligned} \quad (3.5)$$

Néhány azonosság komplex gyökök esetére:

$$e^{\lambda t} = e^{at+bt i} = e^{at}e^{bt i} = e^{at}(\cos(bt) + i \sin(bt)) \quad (3.6)$$

ahol $\lambda = a + ib$, $a, b \in \mathbb{R}$. Könnyen látható, hogy ha λ gyök, akkor λ^* is gyök. Így gyakorta hasznos a következő két összefüggés:

$$\frac{e^{\lambda t} + e^{\lambda^* t}}{2} = e^{at} \cos(bt), \quad \frac{e^{\lambda t} - e^{\lambda^* t}}{2} = e^{at} \sin(bt). \quad (3.7)$$

4. Példák

4.1. Szétválasztható differenciálegyenletek

1. Példa. Tekintsük a következő rendszert:

$$x' = kx, \quad \text{, azaz} \quad \frac{dx}{dt} = kx. \quad (4.1)$$

Legyen $x(0) = a$ a vizsgált kezdetiérték probléma. Rendezzük különoldalra az x -es és t -s tagokat. Így

$$\frac{1}{k} \frac{dx}{x} = dt \quad (4.2)$$

Mindkét oldalt integrálva $\ln |x| = kt + c$ a differenciálegyenlet általános megoldása. Exponencializálva és használva a kezdeti feltételt a megoldásunk $x(t) = ae^{(kt)}$.

2. Példa. Tekintsük a következő rendszert:

$$x'(t)x^2(t) = 1. \quad (4.3)$$

Látható, hogy szétválasztható változójú differenciálegyenlet, ezért $f(t) = 1$ és $g(x) = \frac{1}{x^2}$ választással $x' = f(t)g(x)$ alakra hozható. Rendezzük át ezt az egyenletet (formálisan dt -vel szorzunk), így:

$$x^2 dx = dt. \quad (4.4)$$

Végezzük el az integrálást, így

$$\frac{x^3}{3} = t + C \Rightarrow x(t) = \sqrt[3]{3t + 3C}. \quad (4.5)$$

3. Példa. Induljunk ki a

$$x' = \frac{2xt \ln x}{t^2 - 1}, \quad (4.6)$$

differenciálegyenletből. Mint láthatjuk $f(t) = \frac{2t}{t^2-1}$ és $g(x) = x \ln x$ választás esetén $x' = f(t)g(x)$ alakú egyenletet kapunk:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{2xt \ln x}{t^2 - 1} \Rightarrow \frac{dx}{x \ln x} = \frac{2t}{t^2 - 1} dt, \quad (4.7)$$

integrálással adódik:

$$\begin{aligned} \int \frac{\frac{1}{x}}{\ln x} dx &= \int \frac{2t}{t^2 - 1} dt \\ \Downarrow \\ \ln |\ln x| &= \ln |t^2 - 1| + \ln C \end{aligned} \quad (4.8)$$

4.2. Elsőrendű lineáris differenciálegyenletek megoldása

Az

$$x'(t) + p(t)x(t) = q(t) \quad (4.9)$$

alakú differenciálegyenleteket elsőrendű lineáris differenciálegyenleteknek hívjuk. Itt feltételezzük, hogy $p(t)$ és $q(t)$ függvények folytonosak.

Az ilyen alakú egyenletek megoldását a következő példán szemléltetjük:

$$tx' + 3x = t^2. \quad (4.10)$$

Rendezzük az egyenletet, így

$$x' + \frac{3}{t}x = t. \quad (4.11)$$

A megoldás két lépésből áll, először megoldjuk a homogén differenciálegyenletet (a megoldás x_h), majd ennek az általános megoldásában előforduló C konstans helyére olyan $C(t)$ függvényt írunk, hogy továbbra is megoldást kapjunk. Így módon az eredeti egyenlet egy úgynevezett partikuláris megoldásához jutunk (x_p). Az általános megoldást úgy kapjuk, hogy a homogén egyenlet általános megoldásához hozzáadjuk az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldását.

Folytassuk tehát a homogén egyenlet megoldásával

$$x' + \frac{3x}{t} = 0, \quad (4.12)$$

látjuk, hogy ez szétválasztható változójú differenciálegyenlet, és megoldása $x_h = \frac{C}{t^3}$. Keressünk most egy partikuláris megoldást, ehhez szükségünk van egy olyan $C(t)$ függvényre, amely esetén x_p megoldja az eredeti (inhomogén) egyenletet. Ezek szerint

$$\begin{aligned} x_h(t) &= \frac{C(t)}{t^3} & \Big/ \frac{d}{dt} \\ x'(t) &= -3C(t)t^{-4} + C'(t)t^{-3}, \end{aligned} \quad (4.13)$$

amit helyettesítsünk vissza az eredeti (rendezett) inhomogén egyenletbe

$$C'(t)t^{-3} - 3C(t)t^{-4} + 3C(t)t^{-4} = t, \quad (4.14)$$

innen $C(t) = \frac{t^5}{5}$. Eltekintetünk az integrálási konstans feltüntetésétől, mert nekünk egy tetszőleges partikuláris megoldásra volt szükségünk. Tehát $x_p(t) = C(t)t^{-3} = \frac{t^2}{5}$, így az általános megoldásunk

$$x_{\text{ált}}(t) = x_h(t) + x_p(t) = ct^{-3} + \frac{t^2}{5}. \quad (4.15)$$

A megoldásnak ezt a módszerét konstansvariációs módszernek nevezzük.

Ajánlott irodalom:

1.