A jegyzet az órán elhangzott anyagot tartalmazza. Amennyiben, ha valaki hibát, hiányosságot talál benne, kérem jelezze a rugabi1994@gmail.com címre.

1. előadás – Differenciál egyenletek

Általános egyenletek

Tekintsük az alábbi példát:

$$2x + 3y = 5$$

Nem tekinthető differenciálegyenletnek, mert nem szerepel benne derivált. Ez egy **lineáris egyenlet**, $(x, y) = (1,1)$ egy megoldása, azonban lineáris egyenletnek is végtelen sok megoldása lehet, nem csak differenciálegyenletnek. Tehát számok a megoldások.

A következő példa:

$$x^2 + 3x + 5 = 0$$

egy **másodfokú egyenlet**. Érdekessége, hogy nincs **valós** megoldása, hiszen a megoldóképletbe behelyettesítve negatív szám jönne ki a gyökjel alatt.

Azonban vannak olyan egyenletek, amelynek függvénycsalád a megoldása, mint például:

$$f(x) + f(y) = f(xy) \quad \forall x, y \in R$$

A **differenciálegyenlet** olyan egyenlet, amelyben az ismeretlen függvény deriváltja is szerepel, például:

$$y' = y - 2x \quad f'(x) = f(x) - 2x$$

Az x a változó, $y=y(x)$ a függvény, $y'=y'(x)$ pedig a derivált.

Definíció:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \omega(x)$$

Egy függvény lineárisan approximálható, azaz a függvényt egyenes szakaszokkal tudjuk helyettesíteni.

Iránymezők

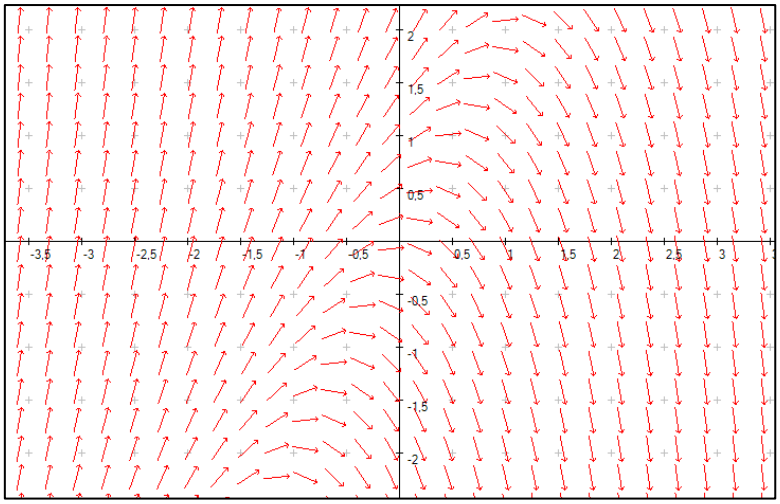
Fontos szerepet játszik a differenciálegyenleteknél, a függvény differenciálhatóságából következik, hogy lineárisan approximálható-e. Tetszőleges pont választása során feltételezzük, hogy ebben a pontban van megoldás, akkor eleget kell tennie, hogy ebben a pontban adott meredekséget vesz fel a görbe, ami átmegy az adott ponton.

$$y' = y - 2x$$

Vegyük a $(2,3)$ pontot, ekkor $y' = -1$, tehát az érintő meredeksége (-1) lesz. Az egyenletbe behelyettesítve:

$$-1 = y - 2x \rightarrow y = 2x - 1$$

lesz az az egyenes, amely mentén a meredekség -1.



Szétválasztható differenciálegyenletek

Definíció: egy differenciálegyenlet szétválasztható, ha

$$f(y)y' = g(x)$$

alakra hozható.

Például:

$$y' - y = 2x$$

nem választható szét, mert nem tudjuk a fent említett alakra hozni.

Láncszabály

$$[f, g(x)]' = f'\big(g(x)\big) * g'(x)$$

$$[f, (y)]' = h'(y) * y'$$

$$y' = \frac{dy}{dx}$$

$$\int f'(y)y'dy = \int f'(y)dy$$

$$f(y) * y' = g(x)$$

$$\int f(y)dy = \int g(x)dx$$

Tehát így megoldható a differenciálegyenlet, hogy mindkét oldalon x szerint integrálok.

Változóiban homogén fokszámú differenciálegyenletek

Definíció: egy differenciálegyenlet változóiban homogén fokszámú, ha $y = f(x/y)$, $y' = g(y/x)$ alakra hozható.

$$f(z) = z^2 - \ln(z) + 2$$

$$f\left(\frac{y}{x}\right) = \left(\frac{y}{x}\right)^2 - \ln\left(\frac{y}{x}\right) + 2$$

Ismeretlent tartalmazó változóval nem osztunk, mert megoldást veszíthetünk!

$$v = \frac{x}{y}, u = \frac{y}{x}$$

helyettesítést alkalmazzuk.

$$y = \frac{x}{v} \rightarrow y' = \frac{v - xv'}{v^2}$$

$$\frac{v - xv'}{v^2} = f(v)$$

$$v - xv = v^2 f(v)$$

$$v - v^2 f(v) = xv'$$

$$\frac{1}{x} = \frac{v'}{v - v^2 f(v)}$$

Lineáris differenciálegyenletek

Definíció: egy differenciálegyenlet lineáris, ha

$$y' + f(x)y = g(x)$$

alakra hozható. $g(x) = 0$ esetén homogén, $g(x) \neq 0$ esetén pedig inhomogén.

Az $y'+f(x)y$ a belső mozgási állapot, a $g(x)$ pedig zavaró függvényként fogható fel.

Megoldás menete:

Az első lépésben mindig rendezni kell a megfelelő alakra, majd homogenizálni az egyenletet

$$y' + f(x)y = 0$$

erről állítjuk, hogy szétválasztható, $y=0$ mindig megoldás, és a megoldás pedig mindig számszor valami.

Tehát, az (1) $y=0$, valamint (2) $y\neq0$ eseteket vizsgáljuk meg

$$y' = -f(x)y$$

$$(1)\ y = 0 \rightarrow y' = 0$$

$$0 = f(x) * 0$$

$$0 = 0$$

$$(2)\ y \neq 0$$

akkor leoszthatok vele, így

$$\frac{y'}{y} = f(x)$$

$$\int \frac{dy}{y} = -\int f(x)dx$$

$$\ln|y| = -\int f(x)dx$$

$$|y| = e^{-\int f(x)dx}$$

$$y = \pm e^{-\int f(x)dx} = c * e^{-\int f(x)dx}$$

$$y_h = c * e^{-\int f(x)dx}$$

$$y_h = c * h(x)$$

lesz a homogén egyenlet egy megoldása.

Következő lépésben az inhomogén megoldást kell megadni.

$$y' + f(x)y = g(x)$$

A partikuláris megoldás pedig:

$$y_p = c(x) * h(x)$$

Ekkor a differenciálegyenlet teljes megoldása

$$Y = y_h + y_p$$

lesz.

Kezdeti érték probléma

Differenciálegyenlethez tartozó kezdeti feltétel, általában 0 időpontban szokott lenni. A kezdeti feltétel nem garantálja, hogy a differenciálegyenletnek egy megoldása lesz. Adott időpillanatban hol vagyunk – határozza meg a kezdeti érték probléma, leszűkítheti a megoldáshalmazt.