

A jegyzet az órán elhangzott anyagot tartalmazza. Amennyiben, ha valaki hibát, hiányosságot talál benne, kérem jelezze a rugabi1994@gmail.com címre.

3. előadás – Laplace-transzformált

Differenciálegyenletek egy csoportja algebrai egyenletté alakítható. Ennek egyik eszköze a Laplace transzformáció.

Definíció: Legyen $f(t)$ az $[0, \infty)$ intervallumon értelmezett függvény. Ekkor az f Laplace transzformáltjának nevezzük az alábbi impropius integrált, amennyiben létezik.

$$L[f(t)](s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt, \quad t \geq 0, \quad s > 0$$

Az s egy paraméter az integrálban. Csak abban az esetben beszélhetünk a függvény Laplace transzformáltjáról, ha az integrál konvergens.

Az alábbi táblázat összefoglalja a leggyakrabban használt függvények Laplace transzformáltjával.

$f(t)$	$F(p) = \mathcal{L}(f)$	
1	$\frac{1}{p}$,	ha $p > 0$
e^{at}	$\frac{1}{p-a}$,	ha $p > a$
$t^n, n = 1, 2, \dots$	$\frac{n!}{p^{n+1}}$,	ha $p > 0$
$e^{at}t^n, n = 1, 2, \dots$	$\frac{n!}{(p-a)^{n+1}}$,	ha $p > a$
$\sin bt$	$\frac{b}{p^2 + b^2}$,	ha $p > 0$
$\cos bt$	$\frac{s}{p^2 + b^2}$,	ha $p > 0$
$e^{at} \sin bt$	$\frac{b}{(p-a)^2 + b^2}$,	ha $p > a$
$e^{at} \cos bt$	$\frac{p-a}{(p-a)^2 + b^2}$,	ha $p > a$

Alkalmazása

A Laplace transzformáció használható lineáris differenciálegyenletek, integrálegyenletek, differenciálegyenletek és parciális differenciálegyenletek bizonyos csoportjának megoldásaira.

Kezdetiérték-probléma megoldásának lépései:

- Vegyük az egyenlet mindkét oldalának Laplace transzformáltját.
- A tulajdonságok és kezdeti feltételek felhasználásával kapunk egy egyenletet a megoldás Laplace transzformáltjára.
- Inverz Laplace transzformációval megkapjuk a kezdetiérték-probléma megoldását.

Példák

$$f(t) \equiv 1, \int_0^{\infty} e^{-st} dt = \lim_{a \rightarrow \infty} \left[\frac{e^{-st}}{-s} \right]_0^a = \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{e^{-st} - 1}{-s} = \frac{1}{s}$$

$$L[f(t)](s) = Y(s)$$

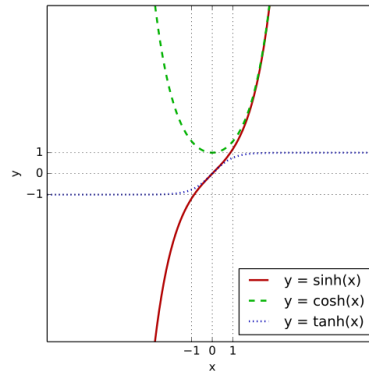
$$L[e^{at}f(t)](s) = \int_0^{\infty} e^{at}e^{-st} dt = \int_0^{\infty} e^{-(s-a)t} dt = Y(s-a)$$

$$1 \rightarrow \frac{1}{s}, e^{2t} \rightarrow \frac{1}{s-2}, e^t \rightarrow \frac{1}{s-1}, e^{-t} \rightarrow \frac{1}{s+1}$$

$$ch(t) = \frac{e^t + e^{-t}}{2} \rightarrow \frac{\frac{1}{s-1} + \frac{1}{s+1}}{2} = \frac{s}{s^2 - 1}$$

$$sh(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{2} \rightarrow \frac{1}{s^2 - 1}$$

A koszinusz hiperbolikus mérnöki szempontból fontos, hiszen, ha két oszlop közé kellene kifeszíteni egy kábelt, hogy legkisebb legyen rajta a feszültség, akkor ezzel a függvénnyel írható le a kábel görbéje.



$$L[f(t)](s) \rightarrow Y(s), \quad f(0) = y_0$$

$$L[f'(t)](s) = \int_0^\infty f'(t)e^{-st} dt = [f * g]_0^\infty - \int_0^\infty f(t)(-s)e^{-st} dt =$$

$$-f(0)g(0) + s \int_0^\infty f(t)e^{-st} dt = sY(s) - y_0$$

$$tF(t) = \int_0^\infty tf(t)e^{-st} dt$$

Oldjuk meg az alábbi differenciálegyenletet Laplace-transzformáció segítségével!

$$y' + 5y = e^{-2x} + 1, \quad y(0) = 3$$

$$sY - 3 + 5Y = \frac{1}{s+2} + \frac{1}{3}$$

$$Y(s+5) = 3 + \frac{1}{s+2} + \frac{1}{3}$$

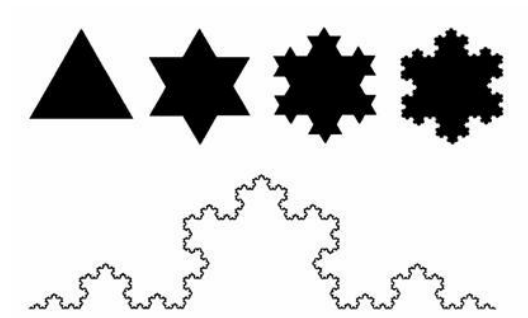
$$Y = \frac{3}{s+5} + \frac{1}{(s+2)(s+5)} + \frac{1}{3(s+5)}$$

$$\rightarrow L^{-1} \rightarrow y = \dots$$

A következő differenciálegyenlet érdekessége, hogy egyik típusba sem sorolható, de csak Laplace-transzformáció segítségével oldható meg.

$$yy' + 6y = t^2$$

Koch görbe



A görbét úgy állíthatjuk elő, hogy egy szabályos háromszög oldalait elharmadoljuk, majd a középső harmadára ismét egy szabályos háromszöget rajzolunk. Ezen háromszögek oldalait szintén harmadoljuk, és háromszöget rajzolunk rájuk. Ezt a végtelenségig folytatjuk. A görbe hossza az n -edik lépés után $(4/3)^n$. Gondoljunk bele gyógyszer esetén, hogy meg lehet növelni a felületét.